Trụ sở chính:766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút
(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Câu 1: (2 điểm)

a) Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, do xe bị hỏng nên người ấy phải dừng lại 30 phút để sửa xe. Vì vậy muốn đến B đúng giờ đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+25}=0$

Câu 2: (1 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có n^7-n chia hết cho 42.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Câu 3: (1 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge 2\left(a+b+c\right)$$

b) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\dfrac{5}{2}$

Câu 4: (1 điểm)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4;\ x^2+y^2+z^2=6$

a) Tính giá trị $xy+yz+zx$ và chứng minh rằng $\dfrac{2}{3}\le z\le 2$

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+z^3$

Câu 5: (3 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên cung nhỏ BC lấy điểm E (khác B, C), AE cắt CD tại F. Gọi giao điểm của CB và AE là G, giao điểm của ED và AB là H.

a) Chứng minh rằng AE là phân giác của góc CED và tứ giác FOBE nội tiếp.
b) Chứng minh GH // CD
c) Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE.

Câu 6: (1 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi BE và CF là các phân giác trong của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tam giác AEF có ba góc nhọn.
b) Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng EF. Gọi H, D, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh: MH = MD + MK.

Câu 7: (1 điểm)

Cho các số tự nhiên a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng tích của 6 số : a – b, b – c, c – d , d – a , a – c , b – d là một số nguyên chia hết cho 12.

HẾT

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2016-2017
MÔN THI: TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)
Thời gian: 150 phút

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2 điểm)

a) Quãng đường từ A đến B dài 50km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, do xe bị hỏng nên người ấy phải dừng lại 30 phút để sửa xe. Vì vậy muốn đến B đúng giờ đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của người đi xe đạp (điều kiện x > 0)

Thời gian dự định đi là: $\frac{50}{x}$ (giờ)

Quảng đường người đó đi được sau 2 giờ là: 2x (km)

Quảng đường người đó đi với vận tốc tăng thêm 2 km/h là $50-2x$ (km)

Thời gian người đó đi với vận tốc x + 2 là: $\frac{50-2x}{x+2}$ (giờ)

Thời gian dừng lại để sửa xe là 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{50-2x}{x+2}=\frac{50}{x}\Leftrightarrow x^2+10x-200=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\,(\text{nhận})\\x=-20\,(\text{loại})\end{array}\right.$$

Vậy vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là 10 km/h.

b) Giải phương trình: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+25}=0$

Điều kiện: $x\ge -4$.

Ta có: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+25}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+25}$

$$\Leftrightarrow x+4+x+9+2\sqrt{(x+4)(x+9)}=x+25\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+4)(x+9)}=12-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12-x\ge 0\\4(x+4)(x+9)=144-24x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 12\\3x^2+76x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 12\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{76}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{76}{3}\end{array}\right.$$

So với điều kiện $x\ge -4$, ta nhận x = 0.

Vậy $S=\{0\}$

Câu 2: (1 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có n^7-n chia hết cho 42.

Ta có: $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^2-1)(n^4+n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^4+n^2+1)$

Ta có: n – 1, n , n + 1 ;là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3
Mà ƯCLN (2,3) =1 và 2.3 =6

Nên $(n-1)n(n+1)\vdots 6$. Suy ra $(n^7-n)\vdots 6$

Mặt khác $\left(n^7-n\right)\vdots 7$ (Theo định lí Fec-ma nhỏ)

Mà ƯCLN (6,7) =1 và 6.7=42

Nên n^7-n chia hết cho 42.

Phụ lục: Định lí Fec-ma nhỏ

Nếu p là một số nguyên tố, a là số nguyên bất kì và thì $\left(a^p-a\right)\vdots p$

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Ta có: $x\in Z$ và $\dfrac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên $\Rightarrow (x-3)\vdots(x^2+1)\Rightarrow (x+3)(x-3)\vdots(x^2+1)\Rightarrow (x^2-9)\vdots(x^2+1)$

$\Rightarrow (x^2+1-10)\vdots(x^2+1)\Rightarrow 10\vdots(x^2+1)\Rightarrow x^2+1$ là ước của 10.

Mà $x^2+1\ge 1$. Do đó $x^2+1\in\{1;2;5;10\}$

$\Rightarrow x^2\in\{0;1;4;9\}\Rightarrow x\in\{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$

Thử lại ta có $x\in\{0;1;-1;-2;3\}$

Câu 3: (1 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge 2(a+b+c)$$

Ta có:

$$(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\ge (a+b)^2\Leftrightarrow\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge\sqrt{(a+b)^2}\Leftrightarrow\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge a+b$$

Tương tự có: $\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\ge b+c$; $\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge c+a$

Do đó $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge a+b+b+c+c+a$

Vậy $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}\ge 2(a+b+c)$

b) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\dfrac{5}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}=2\cdot\frac{1}{2}=1\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 2\Leftrightarrow\frac{3}{4}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge\frac{3}{2}\quad(2)$$

Từ (1) và (2), cộng vế theo vế ta có:

$$\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{3}{4}\cdot\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 1+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\frac{5}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 4: (1 điểm)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4;\ x^2+y^2+z^2=6$

a)Tính giá trị $xy+yz+zx$ và chứng minh rằng $\frac{2}{3}\le z\le 2$

Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

Mà $x+y+z=4;\ x^2+y^2+z^2=6$ (gt)

Do đó $4^2=6+2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)=10$

Vậy xy + yz + zx = 5

Ta có: $(x+y)^2\le(x+y)^2+(x-y)^2\Leftrightarrow(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$

Mà x + y = 4 – z (vì x + y + z = 4), $x^2+y^2=6-z^2$ (vì $x^2+y^2+z^2=6$)

Do đó $(4-z)^2\le 2(6-z^2)\Leftrightarrow 16-8z+z^2\le 12-2z^2$

$\Leftrightarrow 3z^2-8z+4\le 0\Leftrightarrow(3z-2)(z-2)\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le z\le 2$

Chứng minh tương tự có $\frac{2}{3}\le x\le 2$, $\frac{2}{3}\le y\le 2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+z^3$

Ta có: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Do đó $4.(6-5)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Vậy $x^3+y^3+z^3=3xyz+4$

Ta có: $x\le 2;\ y\le 2;\ z\le 2$.

Nên $(x-2)(y-2)(z-2)\le 0\Leftrightarrow xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8\le 0$

Do đó: $xyz-2.5+4.4-8\le 0\Leftrightarrow xyz\le 2$

Vậy $P=x^3+y^3+z^3=3xyz+4\le 3.2+4=10$

Dấu "=" có thể xảy ra khi x = 2, y = z = 1.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 10

Mặt khác $x\ge\frac{2}{3};\ y\ge\frac{2}{3};\ z\ge\frac{2}{3}$

Nên $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow xyz-\frac{2}{3}(xy+yz+zx)+\frac{4}{9}(x+y+z)-\frac{8}{27}\ge 0$

Do đó $xyz-\frac{2}{3}.5+\frac{4}{9}.4-\frac{8}{27}\ge 0\Leftrightarrow xyz\ge\frac{50}{27}$

Vậy $P=x^3+y^3+z^3=3xyz+4\ge\frac{86}{9}$

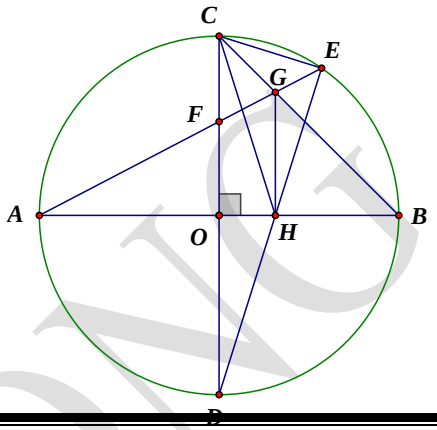
Dấu "=" có thể xảy ra khi $x=\frac{2}{3};\ y=z=\frac{5}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{86}{9}$.

Câu 5: (3 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên cung nhỏ BC lấy điểm E (khác B, C), AE cắt CD tại F. Gọi giao điểm của CB và AE là G, giao điểm của ED và AB là H.

a) Chứng minh rằng AE là phân giác của góc CED và tứ giác FOBE nội tiếp.



Ta có: $AB \perp CD$ (gt) $\Rightarrow AC = AD \Rightarrow CEA = DEA$

$\Rightarrow$ AE là tia phân giác góc CED

Mặt khác $BEF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có : $FHB + BEF = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác FOBE nội tiếp.

b) Chứng minh GH // CD

Ta có: $AC = AD \Rightarrow HBG = HEG \Rightarrow$ Tứ giác GEBH nội tiếp $\Rightarrow GHO = GEB = 90^0$

Ta có: $GH \perp AB,\ CD \perp AB$ (gt) $\Rightarrow GH//CD$

c) Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE.

Ta có: $GH//CD$ (cm b) $\Rightarrow GHE = CDH,\ CHG = DCH$

Mặt khác ΔHCD có HO vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \Delta HCD$ cân tại H

$\Rightarrow CDH = DCH$. Do đó $GHE = CHG \Rightarrow$ HG là tia phân giác của góc CHE.

ΔCHE có EG, HG là hai đường phân giác cắt nhau tại G.

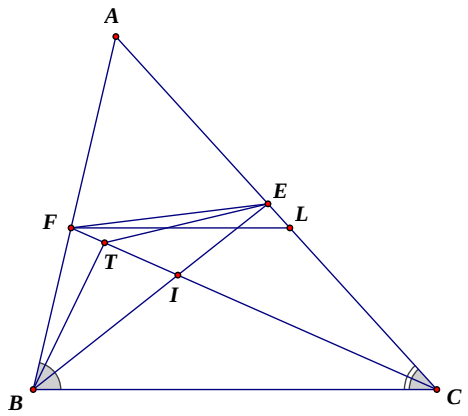
Do đó G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE.

Câu 6: (1 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Gọi BE và CF là các phân giác trong của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tam giác AEF có ba góc nhọn.

Gọi I là giao điểm của BE và CF.



ΔBAC có AB < AC (gt) $\Rightarrow ACB < ABC$

Mà $ABE = \dfrac{ABC}{2}, ACF = \dfrac{ACB}{2}$. Nên $ABE > ACF$

Do đó tồn tại điểm T trên đoạn thẳng IF sao cho $EBT = ACF$

$\Rightarrow$ Tứ giác BTEC nội tiếp $\Rightarrow AET > TBC$.

Mà $TBCM < ABC,\ ABC < 90^0,\ AEF < AET$

Do đó $AEF < AET = TBC < ABC < 90^0 \Rightarrow AEF < 90^0$.

Vậy AEF nhọn.

Qua F vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại L.

Ta có: $\dfrac{LC}{LA} = \dfrac{FB}{FA}$ (ΔABC có FL // BC), $\dfrac{BC}{CA} = \dfrac{FB}{FA}$ (ΔABC có CF là phân giác), $\dfrac{BC}{AC} < \dfrac{BC}{AB}$ (AB < AC),

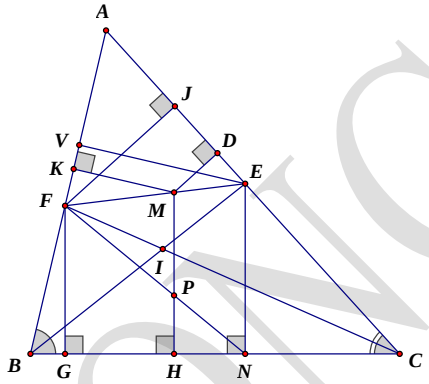
$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{EC}{EA}$ (ΔABC có BE là phân giác)

Suy ra $\frac{LC}{LA} < \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{AC}{LA} < \frac{AC}{EA} \Rightarrow LA > EA \Rightarrow$ E nằm giữa A, L $\Rightarrow AFE = AFL$

Mà $ABC = AFL$ (FL//BC), $ABC < 90^0$ (gt). Nên $AFE < 90^0$. Mặt khác $FAE < 90^0$ (ΔABC nhọn)
Vậy tam giác AEF có ba góc nhọn.

b) Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng EF. Gọi H, D, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh MH = MD + MK.

Gọi N, V lần lượt là hình chiếu của E lên BC, AB. G, J lần lượt là hình chiếu của F lên BC, AC. P là giao điểm của MH và FN.



Ta có EN = EV, FJ = FG

$\frac{MP}{FJ} = \frac{EM}{EF} = \frac{NP}{NF} = \frac{PH}{FG} \Rightarrow MD = PH$

Và $\frac{MK}{EV} = \frac{FM}{FE} = \frac{MP}{EN} \Rightarrow MK = MP$

Do đó MH = PH + MP = MD + MK.

Câu 7: (1 điểm)
Cho các số tự nhiên a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng tích của 6 số :
a – b, b – c, c – d , d – a , a – c , b – d là một số nguyên chia hết cho 12.

Đặt M = (a – b)(b – c) (c – d) (d – a) (a – c) (b – d).
Các số a, b, c, d chia cho 3 có số dư là 0, 1 hoặc 2, do đó có ít nhất hai số chia cho 3 cùng số dư
Suy ra hiệu của hai số đó chia hết cho 3 $\Rightarrow M \vdots 3$
Trong bốn số a, b, c, d xảy ra hai trường hợp:

- Có hai số chẵn (chẳng hạn a và b) và hai số lẻ (c và d). Ta có $(a-b) \vdots 2, (c-d) \vdots 2$ nên $M \vdots 4$.
- Có ba số chẵn hoặc ba số lẻ (chẳng hạn a, b, c). Ta có $(a-b) \vdots 2, (b-c) \vdots 2$ nên $M \vdots 4$

Vậy $M \vdots 4$
Ta có ƯCLN (3; 4) = 1 và 3.4 = 12
Vậy M = (a – b)(b – c) (c – d) (d – a) (a – c) (b – d) chia hết cho 12

HẾT

THĂNG LONG